

Von Pol zu Pol – von Sprung zu Sprung

Eine numerische Reise zu einem analytischen Ziel,
durchgeführt auf dem TI-92/89, bzw. mit DERIVE

Josef Böhm, Würmla, T³ Austria und DERIVE User Group, nojo.boehm@pgv.at

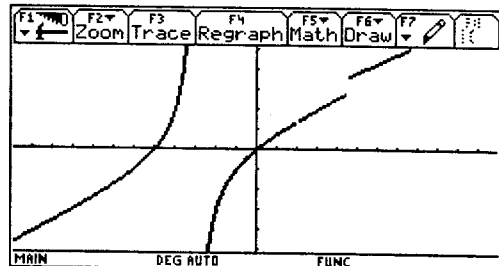
Der Data/Matrix-Editor des TI-89/92 ist ein hervorragendes Werkzeug, um Begriffsbildungen wie Häufungspunkte, Grenzwerte, Stetigkeit und Differenzierbarkeit zu unterstützen. Wie wir sehen werden, kann auch ein sehr intuitiver Zugang zu komplexeren Themen wie Krümmung und Evoluten gefunden werden. Einige Schritte können auch mit einem Tabellenkalkulationsprogramm durchgeführt werden. Ich vermisse dabei aber bald den gewohnten Umgang mit Funktionen und noch wichtiger, die Computer Algebra. Es mag sein, dass Spreadsheetspezialisten alle hier angestrebten Ziele auch auf ihrer Plattform erreichen. Ich bezweifle aber, dass sie die analytische Form einer Ableitung oder gar einer Evolute so finden können. In diesem Papier wird weitgehend parallel mit dem TI-92/89 und mit DERIVE gearbeitet. Damit soll erstens beiden Benutzergemeinden gedient werden und sie können sich wechselseitig informieren, wie's beim „kleinen Bruder“, bzw. der „großen Schwester“ gemacht wird. Mehr noch möchte ich aber demonstrieren, dass es bei der Durchführung eines Unterrichtskonzepts nur in zweiter Linie auf das gewählte Instrument ankommt. Ich selbst habe diesen Zugang zuerst in meinen TI-Klassen (4. Jg Handelsakademie) genommen und ihn später auf DERIVE übertragen. Jede andere CAS-Software würde sich ebenso gut eignen. Nebenbei erfahren Sie vielleicht manches Brauchbare über den Umgang mit dem TI, bzw. mit DERIVE:

Im Text eingestreut finden sich Hinweise auf Schüleraufgaben, bzw. fragen.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer etwas ausgefallenen Funktion.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 4} + \frac{3 \operatorname{sign}(2x - 9)}{x + 3}$$

(Hinweis: ZoomDec und xres=1)



Schülerfragen: Welche Werte für x sind nicht in der Definitionsmenge enthalten?
Welche Auffälligkeiten lassen sich am Graphen erkennen?
Welche Antworten lassen sich aus einer geeigneten Wertetabelle ableiten?

Vorgangsweise auf dem TI:

Ich empfehle, die Funktion als $f(x)$ im Home Screen zu speichern. Dann öffnen wir ein neues Datenblatt über den Data/Matrix Editor, und benennen dieses Blatt zB als `analysis`.

1 Stetigkeitsuntersuchung an der Stelle $x_0 = 3$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0=	Δx	x0+Δx	f(x+Δx)		
	c1	c2	c3	c4		
1	3	.5000	3.5000	2.2885		
2		.2500	3.2500	2.1450		
3		.1250	3.1250	2.0727		
4		.0625	3.0625	2.0364		
5		.0313	3.0313	2.0182		
6		.0156	3.0156	2.0091		
7		.0078	3.0078	2.0046		
	<code>c2=seq(1/(2.)^n,n,1,10)</code>					

Zelle c1 wird mit dem aktuellen Wert für x_0 belegt (hier $x_0 = 3$). Für Spalte c2 definieren wir, wie gezeigt eine beliebige Nullfolge, mit deren Hilfe wir dann in c3 eine Folge von x -Werten erzeugen, die sich von rechts der Stelle x_0 nähert. Schließlich können wir dann in Spalte c4 verfolgen, wie die Folge der entsprechenden Funktionswerte gegen $f(x_0)$ strebt.

Die Einträge in der Kopfzelle (Header) für diese beiden Spalten lauten:

Für c3: $c1[1]+c2$
für c4: $f(c3)$

(Die eckigen Klammern [i] fixieren das Element in der Zeile i der angegebenen Spalte)

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	$x0+\Delta x$	$f(x+\Delta x)$	$x0-\Delta x$	$f(x0-\Delta x)$		
	c3	c4	c5	c6		
1	3.5000	2.2885	2.5000	1.7045		
2	3.2500	2.1450	2.7500	1.8533		
3	3.1250	2.0727	2.8750	1.9269		
4	3.0625	2.0364	2.9375	1.9635		
5	3.0313	2.0182	2.9688	1.9818		
6	3.0156	2.0091	2.9844	1.9909		
7	3.0078	2.0046	2.9922	1.9954		
c6=f(c5)						
MAIN	DEG AUTO	FUNC				

In den Spalten c5 und c6 wird auf gleiche Weise die Annäherung von links erzeugt.

Schüleraufträge: Wähle eine beliebige andere Nullfolge und beobachte die Geschwindigkeit der Annäherung an eine feste Stelle. Welche Nullfolgen „arbeiten“ langsam und welche schnell?

Wechsle auch die zu untersuchende Stelle x_0 und formuliere das Ergebnis allgemein.

In einem letzten Schritt verallgemeinere auch die Stelle $x_0 = t$. (Wähle nicht x , als Variable, denn das könnte bei älteren TI-Modellen zu kompletten Abstürzen führen). Übertrage die jeweils „letzten“ Funktionswerte in den Home Screen. (Mit $\square \square$ kannst du den markierten Zelleninhalt in die Zwischenablage übertragen und mit $\square \square$ im Home Screen wieder abrufen).

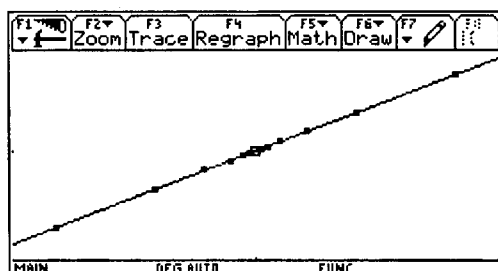
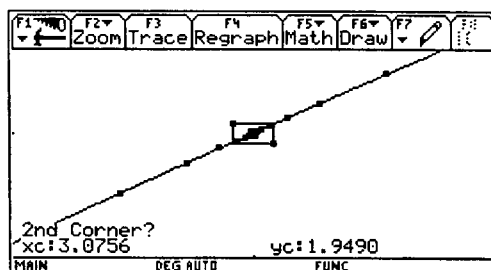
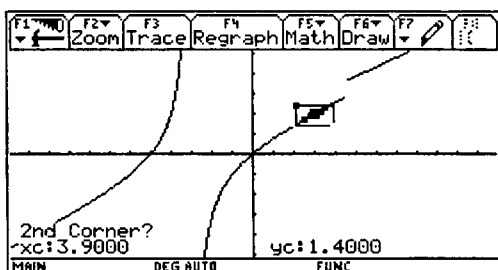
Was erwartest du als Ergebnis?

Arbeite mit einer anderen Funktion deiner Wahl (Polynomfunktion, Exponentialfunktion, Winkelfunktion, ...) und führe eine analoge Untersuchungsreihe durch.

Dokumentiere dabei genau deine Vorgangsweise.

Mit den graphischen Möglichkeiten können wir nun den Prozess visualisieren und damit besser begreiflich machen.

Zusätzlich zum Funktionsgraphen ($y1(x)$ wird im [Y=]-Editor mit $f(x)$ belegt) werden die durch die Spalten c3 und c4, bzw. c5 und c6 definierten Punkte auf dem Graphen gezeichnet. Die entstehenden Punktfolgen sind dann im [GRAPH]-Fenster zu bewundern. Mit Hilfe der [F2] ZoomBox vergrößern wir den interessanten Ausschnitt und erhalten eine gute Vorstellung eines Häufungspunktes.



Schülerauftrag:

Unterschiedliche Folgen mit mehr oder weniger Elementen führen zu intensiveren Darstellungen.

Wie sieht die Punktwolke aus, die aus einer alternierenden Nullfolge entsteht?

Nun wird zu einer der Stellen gewechselt, die von der Definitionsmenge ausgenommen wurden:

2 Stetigkeitsuntersuchung an der Stelle $x_0 = -3$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	$x_0 =$	Δx	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$		
	c1	c2	c3	c4		
1	-3	.1000	-2.9000	-30.4500		
2		.0100	-2.9900	-300.495		
3		.0010	-2.9990	-3000.50		
4		.0001	-2.9999	-30000.5		
5		1.000E-5	-3.00000	-300000.		
6		1.000E-6	-3.00000	-3.000E6		
7		1.000E-7	-3.00000	-3.000E7		
c2=seq(.1/n,n,1,10)						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$x_0 - \Delta x$	$f(x_0 - \Delta x)$		
	c3	c4	c5	c6		
4	-2.9999	-30000.5	-3.0001	29999.50		
5	-3.0000	-300000.	-3.0000	299999.5		
6	-3.0000	-3.000E6	-3.0000	2999999.		
7	-3.0000	-3.000E7	-3.0000	3.000E7		
8	-3.0000	-3.000E8	-3.0000	3.000E8		
9	-3.0000	-3.000E9	-3.0000	3.000E9		
10	-3.0000	-3.000E10	-3.0000	3.000E10		
Pr10c6=29999999999.5						

Die Ergebnisse in den Spalten c4 und c6 sind sehr aufschlussreich!

3 Stetigkeitsuntersuchung an der Stelle $x_0 = 4,5$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	$x_0 =$	Δx	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$		
	c1	c2	c3	c4		
1	4.5000	1	5.5000	4.1029		
2		1/2	5.0000	3.8750		
3		1/3	4.8333	3.7996		
4		1/4	4.7500	3.7621		
5		1/5	4.7000	3.7396		
6		1/6	4.6667	3.7246		
7		1/7	4.6429	3.7140		
c2=seq(1/n,n,1,10)						

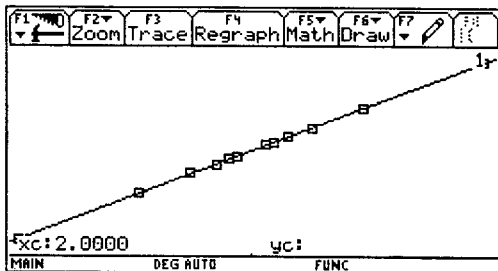
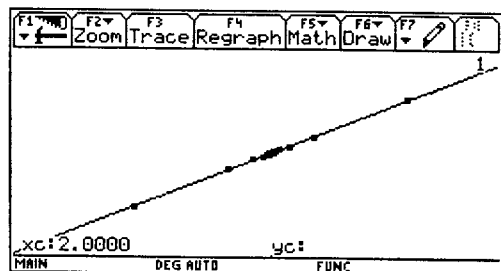
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$x_0 - \Delta x$	$f(x_0 - \Delta x)$		
	c3	c4	c5	c6		
4	4.7500	3.7621	4.2500	2.7112		
5	4.7000	3.7396	4.3000	2.7390		
6	4.6667	3.7246	4.3333	2.7576		
7	4.6429	3.7140	4.3571	2.7708		
8	4.6250	3.7059	4.3750	2.7807		
9	4.6111	3.6997	4.3889	2.7884		
10	4.6000	3.6947	4.4000	2.7946		
Pr10c6=2.7945945945946						

Schülerauftrag:

Diskutiere die Ergebnisse in den Spalten c4 und c6. Ändere auch hier die Nullfolge in c2. Erzeuge eine graphische Darstellung.

4 Die letzte interessante Stelle ist wohl $x_0 = 2$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$x_0 - \Delta x$	$f(x_0 - \Delta x)$		
	c3	c4	c5	c6		
4	2.0039	1.4024	1.9961	1.3976		
5	2.0016	1.4010	1.9984	1.3990		
6	2.0008	1.4005	1.9992	1.3995		
7	2.0004	1.4003	1.9996	1.3997		
8	2.0002	1.4002	1.9998	1.3998		
9	2.0002	1.4001	1.9998	1.3999		
10	2.0001	1.4001	1.9999	1.3999		
Pr10c6=1.39993799976						



Schülerauftrag:

Interpretiere **alle** Informationen, die du aus dem Bild herauslesen kannst.

(Auch eine nicht erscheinende Zahl ist eine Information).

Schülerauftrag:

Fasse vorerst mit eigenen Worten zusammen:

Wann ist eine Funktion an einer Stelle x_0 stetig?

Welche Arten von Unstetigkeit kannst du unterscheiden? Wie äußern sich diese in einer Wertetabelle? Wie stellen sich diese am Graphen dar?

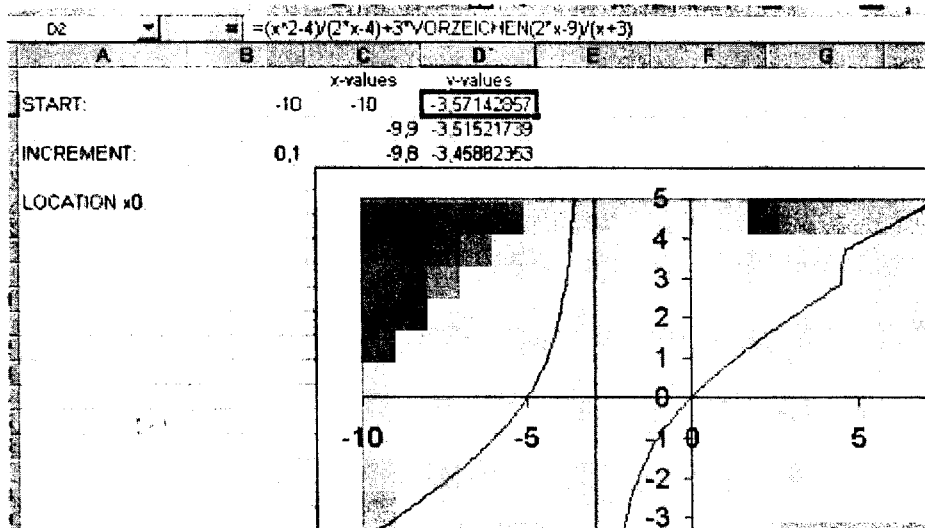
Schüleraufgaben:

Konstruiere eine Funktion mit 2 Polstellen.

Konstruiere eine Funktion mit 2 Sprungstellen.

Konstruiere eine Funktion, mit 2 hebbaren Unstetigkeitsstellen.

Die Stetigkeit kann mehr oder weniger erfolgreich auch mit einer Tabellenkalkulation untersucht werden. Unglücklicherweise wird aber oft bereits der Graph zu Missverständnissen führen. Fairerweise muss aber gesagt werden, dass man auch auf dem TI bei einer ungeschickten Wahl der [WINDOW]-Werte Ergebnisse wie diese vorfinden kann.



Vergleiche die Funktionswerte für die Stellen $x = -3, 2$ und $4,5$. Da passiert nun schon einiges.

4,3	2,7390411
4,4	2,79459459
4,5	2,85
4,6	3,69473684
4,7	3,73961039

-3,2	14,4
-3,1	29,45
-3	1,4686E+14
-2,9	-30,45

1,8	1,275
1,9	1,3377551
2	1,4
2,1	1,46176471
2,2	1,52307692

Für $x = -3$ ergibt sich ein seltsamer Funktionswert, an der Stelle $x = 2$ ist keine Spur von einer Unstetigkeit zu merken und für $x = 4,5$ wird in vorseilendem Gehorsam bereits das arithmetische Mittel aus der links- und rechtsseitigen Annäherung genommen!

Wir versuchen mit der Tabellenkalkulation eine ähnliche Vorgangsweise wie auf dem symbolischen Taschenrechner.

Verhalten an der Stelle $x_0 = -3$:

n	$\Delta x = 0.5^n$	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$x_0 - \Delta x$	$f(x_0 - \Delta x)$
15	3,0518E-05	-2,99996948	-98304,5	-3,00003052	98303,5
16	1,5259E-05	-2,99998474	-196608,5	-3,00001526	196607,5
17	7,6294E-06	-2,99999237	-393216,5	-3,00000763	393215,5
18	3,8147E-06	-2,99999619	-786432,5	-3,00000381	786431,5
19	1,9073E-06	-2,99999809	-1572864,5	-3,00000191	1572863,5
20	9,5367E-07	-2,99999905	-3145728,5	-3,00000095	3145727,5

und an der Stelle $x_0 = 2$:

n	$\Delta x = 0.5^n$	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$x_0 - \Delta x$	$f(x_0 - \Delta x)$
16	1,5259E-05	2,00001526	1,40000946	1,99998474	1,39999054
17	7,6294E-06	2,00000763	1,40000473	1,99999237	1,39999527
18	3,8147E-06	2,00000381	1,40000237	1,99999619	1,39999763
19	1,9073E-06	2,00000191	1,40000118	1,99999809	1,39999882
20	9,5367E-07	2,00000095	1,40000059	1,99999905	1,39999941

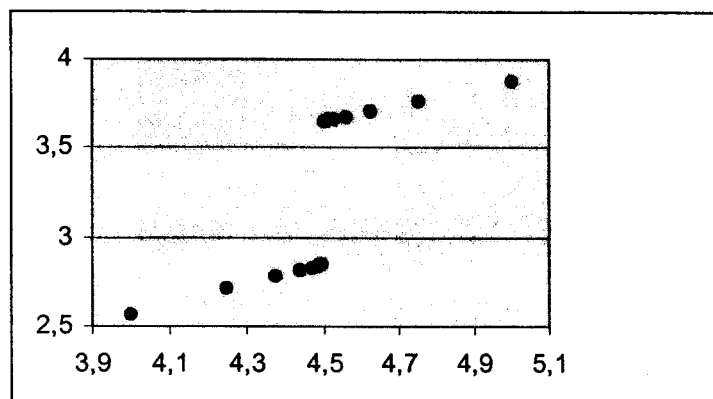
und schließlich für $x_0 = 4,5$:

n	$\Delta x = 0.5^n$	$x_0 + \Delta x$	$f(x_0 + \Delta x)$	$x_0 - \Delta x$	$f(x_0 - \Delta x)$
16	1,5259E-05	4,50001526	3,65000682	4,49998474	2,84999156
17	7,6294E-06	4,50000763	3,65000341	4,49999237	2,84999578
18	3,8147E-06	4,50000381	3,6500017	4,49999619	2,84999789
19	1,9073E-06	4,50000191	3,65000085	4,49999809	2,84999894
20	9,5367E-07	4,50000095	3,65000043	4,49999905	2,84999947

Wenn wir eine andere Folge für die Δx verwenden, dann finden wir eine „Konvergenz“ gegen den Mittelwert aus den letzten links- und rechtsseitigen Funktionswerten.!

1E-14	4,5	3,65	4,5	2,85
1E-15	4,5	3,65	4,5	2,85
1E-16	4,5	3,25	4,5	3,25
1E-17	4,5	3,25	4,5	3,25

Die graphische Darstellung ist recht ordentlich.:



Die Arbeit mit *DERIVE* unterscheidet nur insofern von der Durchführung am *TI*, dass hier der *Data/Matrix-Editor* nicht verfügbar ist. Dafür verwendet man den *VECTOR*, bzw. in der letzten Version den *TABLES* - Befehl.

Die Wertetabelle ergibt sich aus:

$$f(x) := \frac{x^2 - 4}{2 \cdot x - 4} + \frac{3 \cdot \text{SIGN}(2 \cdot x - 9)}{x + 3}$$

mit dem Befehl `TABLE([f(x)], x, -4, 5, 0.5)`

-4	2
-3.5	5.2
-3	$\pm\infty$
-2.5	-6.2
-2	-3
-1.5	-1.7
-1	-1
-0.5	-0.45
0	0
0.5	0.39
1	0.75
1.5	1
2	?
2.5	1.7
3	2
3.5	2.2
4	2.5
4.5	$\pm 0.4 + 3.2$
5	3.8

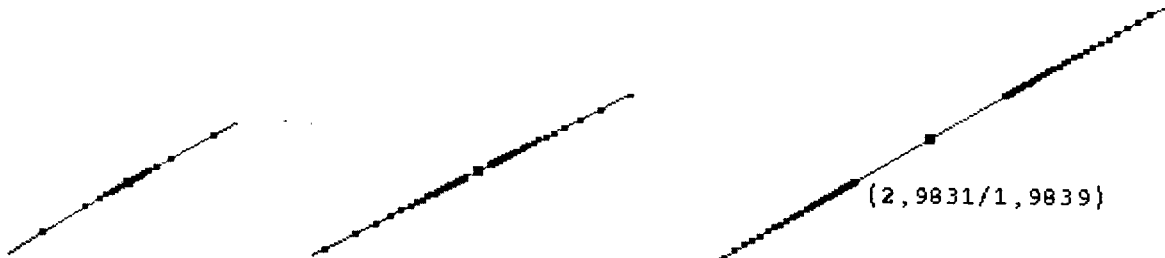
Beachte die Ergebnisse an den „interessanten“ Stellen!

Für die Annäherung entwickelt man am besten gemeinsam mit den Schülern eine möglichst allgemeine Funktion, in der man dann nach Belieben die Funktion f_{-} , die zu untersuchende Stelle x_0 , die Nullfolge u (in Abhängigkeit von n), Anfangs- und Endwert für n und dessen Schrittweite $step$ als Parameter anzugeben hat. Das könnte dann so aussehen:

```
appr(f_, x0, u, start, end, step) :=
VECTOR([x0 + u, SUBST(f_, x, x0 + u)], n,
start, end, step)
```

$$\text{appr}\left(f(x), 3, \frac{1}{n}, 1, 50, 1\right) \quad \text{und} \quad \text{appr}\left(f(x), 3, -\frac{1}{n}, 1, 50, 1\right)$$

ergeben dann mit den entsprechenden Vergrößerungen auch sehr deutliche und ansprechende Darstellungen eines Häufungspunktes.



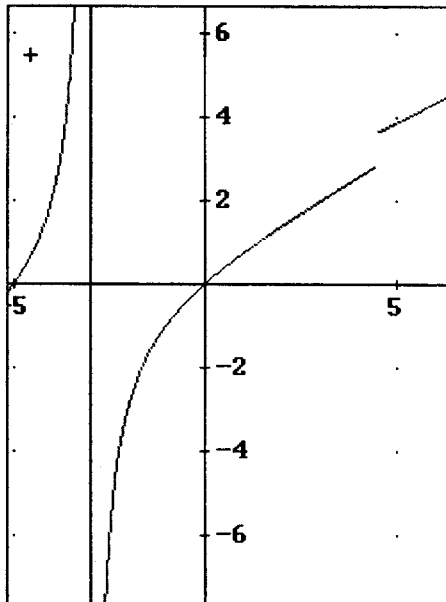
Eine weitere Funktion `appr_both(f_, x0, u, start, end, step)` liefert die Tabelle für links- und rechtsseitige Annäherung. Siehe das folgende Beispiel:

$$\text{appr_both}(f_{-}, x_0, u, \text{start}, \text{end}, \text{step}) := \text{APPEND} \left(\begin{bmatrix} x_{nr} \\ f(x_{nr}) \\ x_{nl} \\ f(x_{nl}) \end{bmatrix}, \text{VECTOR}([x_0 + u, \text{SUBST}(f_{-}, x, x_0 + u), x_0 - u, \text{SUBST}(f_{-}, x, x_0 - u)], n, \text{start}, \text{end}, \text{step}) \right)$$

Die Eingabe dieser Funktionen ist natürlich schon etwas mühselig für Ungeübte, daher würde ich sie den Schülern in einer Hilfsdatei zur Verfügung stellen, begleitet von einer „Gebrauchsanweisung“. Im Anschluß an diesen Aufsatz finden sich alle Hilfsfunktionen zum „Abtippen“. Die entsprechende Datei kann vom Autor gerne erhalten werden. (email oder Anruf genügt).
 Sehen wir uns die Anwendung dieser Funktion an der Stelle $x_0 = -3$ an:

```
appr_both(f(x), -3, 0.5^n, 10, 24, 2) =
```

xnr	f(xnr)	xn1	f(xn1)
-2.99	-3072.4	-3	3071.4
-2.99	-12288.4	-3	12287.4
-2.99	-49152.4	-3	49151.4
-2.99	-196608.4	-3	196607.4
-2.99	-786432.4	-3	786431.4
-2.99	-3145728.4	-3	3145727.4
-2.99	-12582912.4	-3	12582911.4
-2.99	-50331648.4	-3	50331647.4



Die Grafik kann nun leicht um die senkrechte Asymptote erweitert werden.

Sprungstelle und hebbare Unstetigkeit werden in derselben Weise behandelt.

Schülerauftrag:
 Wie kann man die Unstetigkeit beheben? Definiere die Funktion so, dass in der Wertetabelle kein ? mehr auftaucht!

Antwort: $f_{\text{new}}(x) := \text{If}(x=2, 7/5, f(x))$

erscheint dann so am Schirm:

```
fnew(x) :=
  If x = 2
    7/5
    f(x)
```

Auch hier läßt sich mit Funktionen und Folgen aller Art experimentieren und schließlich zu einer letzten Verallgemeinerung schreiten.

```
appr_both(SIN(3·x), x0, 1/n, 5, 25, 5)
```

xnr	f(xnr)	xn1	f(xn1)
$x_0 + 0.008$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 + 0.024)$	$x_0 - 0.008$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 - 0.024)$
$x_0 + 0.001$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 + 0.003)$	$x_0 - 0.001$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 - 0.003)$
$x_0 + 0.00029$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 + 0.00088)$	$x_0 - 0.00029$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 - 0.00088)$
$x_0 + 0.00012$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 + 0.00037)$	$x_0 - 0.00012$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 - 0.00037)$
$x_0 + 6.4 \cdot 10^{-5}$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 + 0.00019)$	$x_0 - 6.4 \cdot 10^{-5}$	$\text{SIN}(3 \cdot x_0 - 0.00019)$

$$\text{appr_both} \left(\frac{\text{SIN}(x)}{x}, 0, 0.2^n, 7, 10, 1 \right)$$

xnr	f(xnr)	xn1	f(xn1)
$1.2 \cdot 10^{-5}$	0.99	$-1.2 \cdot 10^{-5}$	0.99
$2.5 \cdot 10^{-6}$	0.99	$-2.5 \cdot 10^{-6}$	0.99
$5.1 \cdot 10^{-7}$	0.99	$-5.1 \cdot 10^{-7}$	0.99
$1 \cdot 10^{-7}$	0.99	$-1 \cdot 10^{-7}$	0.99

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein merkwürdiges Verhalten, das sich auch so leicht untersuchen läßt!

5 Ein numerischer Zugang zur momentanen Änderungsrate

Wir kehren zurück zur „handheld technology“, zum TI.

Es ist nun sehr einfach, die bereits vorhandene Tabelle für das tiefere Eindringen in die Analysis auszubauen. Wir müssen ein paar Spalten, zuerst für die absoluten Änderungen und dann für die durchschnittlichen Änderungsraten wiederum von beiden Seiten anfügen. In der Klasse wird man natürlich mit einer bekannten Funktion beginnen (Parabel, Kurve 3. Grades und warum nicht mit einer linearen Funktion).

Dann bedienen wir uns einer anderen „künstlichen“ Kurve. Wer kennt nicht die "MM - Kurve"?

$$f(x) = \left(\frac{|x|}{2} - 2 \right)^2$$

$x_0 = 2$:

DATA	rs.af c7	rs.af/Δx c8	ls.af c9	ls.af/Δx c10
4	-.0615	-.9844	-.0635	-1.0156
5	-.0310	-.9922	-.0315	-1.0078
6	-.0156	-.9961	-.0157	-1.0039
7	-.0078	-.9980	-.0078	-1.0020
8	-.0039	-.9990	-.0039	-1.0010
9	-.0020	-.9995	-.0020	-1.0005
10	-.0010	-.9998	-.0010	-1.0002

c7=c4-f(c1[1])

$x_0 = 0$:

DATA	rs.af c7	rs.af/Δx c8	ls.af c9	ls.af/Δx c10
4	.1240	-1.9844	.1240	1.9844
5	-.0623	-1.9922	.0623	1.9922
6	-.0312	-1.9961	.0312	1.9961
7	-.0156	-1.9980	.0156	1.9980
8	-.0078	-1.9990	.0078	1.9990
9	-.0039	-1.9995	.0039	1.9995
10	-.0020	-1.9998	.0020	1.9998

10r10c10=1.9997558593536

In Spalte c7 findet sich die rechtsseitige Differenz der Funktionswerte (= absolute Änderung) und daneben der Quotient aus c7 und c2, der natürlich nichts anderes ist als der (rechtsseitige) Differenzenquotient.

Schülerauftrag:

Ergänze die Tabelle um die nächsten beiden Spalten, sodass auch der linksseitige Differenzenquotient ausgewiesen wird. Beachte die Vorzeichen.

Überprüfe die Ergebnisse anhand einer einfachen Funktion durch händisches Nachrechnen.

Kannst du einen Unterschied im Verhalten der Änderungsraten in den beiden Stellen erkennen?

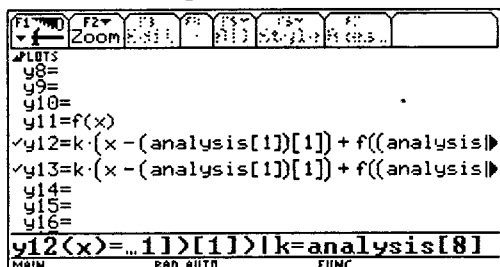
Wie könnte sich das auf die Gestalt des Graphen auswirken?

Wir können die vorliegenden Listen der momentanen Änderungsraten (in den Spalten c8 und c10) dazu benutzen, um die entsprechende Folge der Sekanten zeichnen zu lassen:

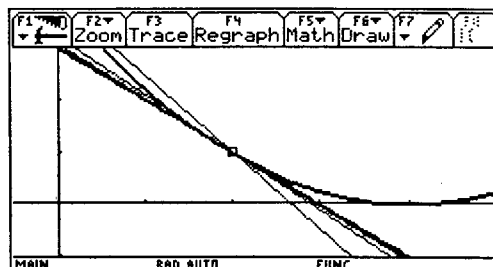
Schülerauftrag:

Wiederhole die Punkt-Richtungsform der Geraden!

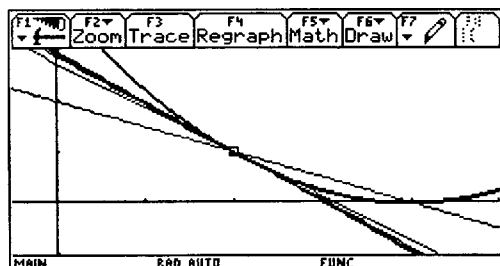
Zuerst an der „guten“ Stelle $x_0 = 2$:



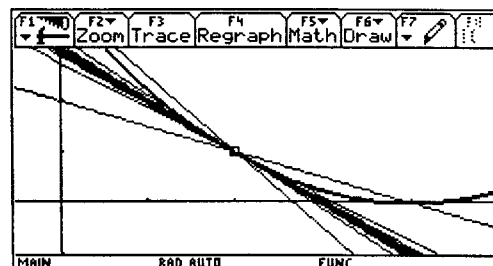
Verwende dir Werte der Tabelle um eine Sekantenschar zu erzeugen



Annäherung von links



Annäherung von rechts



beide Geradenscharen

Die Geradenscharen erhält man direkt auf die folgende Weise:

$$k*(x-\text{analysis}[1][1])+f(\text{analysis}[1][1]) \quad | \quad k = \text{analysis}[8], \text{ bzw. } k*(x-\text{analysis}[1][1])+f(\text{analysis}[1][1]) \quad | \quad k = \text{analysis}[8]$$

Dieser Ausdruck läßt sich direkt als eine Funktion in den [Y=]-Editor schreiben (zeichnet dann sehr langsam, bleibt aber allgemein) oder zuerst im Home Screen auswerten und das Ergebnis in den Funktioneneditor speichern (zeichnet schnell, muß aber bei jeder Änderung wiederholt werden).

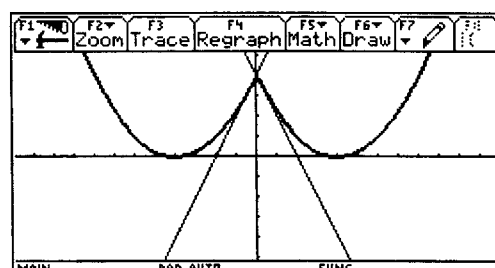
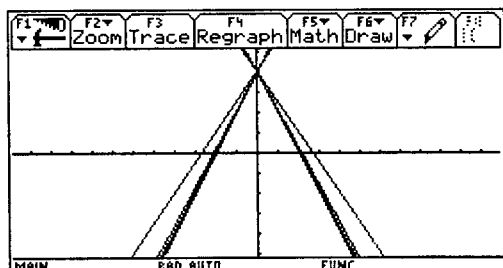
Schülerauftrag:

Verwende verschiedene Folgen, für eine Annäherung an die Stelle x_0 . Ist die Funktion an dieser Stelle stetig?

Erzeuge die links- und rechtsseitige Sekantenscharen und beurteile deren Endverhalten.

Kannst du nun den Verlauf der Tangente im Punkt (0|4) voraussagen?

Kannst Du den Kurvenverlauf überhaupt voraussagen?



Die Definition der Differenzierbarkeit sagt aber doch aus, dass ein stabiler Wert für die momentane Änderungsrate für jede beliebige Nullfolge erreicht werden muss, und dass dieser Wert immer derselbe sein muss. So erzeugen wir eine „Zufalls-Nullfolge“. Sowohl in *DERIVE* als auch beim *TI* gibt es eine Funktion, die eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 erzeugt (`RANDOM(1)`, bzw. `rand()`). Damit ergibt $1 - 2 \cdot \text{RANDOM}(1)$ (oder $1 - 2 \cdot \text{rand}()$) eine Zufallszahl zwischen -1 und $+1$ und wir können leicht eine Folge erzeugen, die je nach dem Wert dieser Zahl eine positive oder eine alternierende Nullfolge erzeugen wird! Die Zufallsfolge könnte dann am *TI* so definiert werden:

$$\text{seq}((1 - 2 \cdot \text{rand}())^n, n, a_, b_) \rightarrow \text{seq}_r(a_, b_)$$

Wir testen dieser Funktion aber erst, bevor wir sie wirklich einsetzen:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<pre>seq((1 - 2 * rand())^n, n, a_, b_) → seq_r(a_, b_) Done</pre>					
<pre>seq_r(1,5) (.43 .93 4.14E-6 1.35E-3 .05)</pre>					
<pre>seq_r(1,5) (-.23 .30 3.78E-4 3.83E-3 4.09E-3)</pre>					
<pre>seq_r(1,5) (.09 .54 .11 1.65E-5 1.97E-7)</pre>					
seq_r(1,5)					
MAIN RAD AUTO FUNC 4/30					

Da dürfte aber etwas nicht stimmen, denn die 2. und 3. Elemente der Folgen sind offensichtlich nicht die Quadrate, bzw. Kuben des jeweiligen Startelements. Der Grund liegt darin, dass der Rechner für jedes Folgeelement eine neue Zufallszahl erzeugt. Um dem abzuhelfen, müssen wir eine etwas größere Funktion über den Programmeditor erzeugen.

Wir legen die Zufallsvariable als lokale Variable `r_` ab und dann funktioniert die Sache. Um ganz flexibel zu sein, wird mit `s_` zufällig $+1$ oder -1 erzeugt und damit erreichen wir auch konstant negative Nullfolgen, wie der nächste Testlauf zeigt.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Control	I/O	Var	Find...	Mode	
<pre>seq_r(a_, b_) :Func :Local r_, v_, s_ :rand() → r_ :(-1)^(rand(2)) → s_ :seq(s_*((.5-r_)^v_, v_, a_, b_) :EndFunc</pre>					
MAIN RAD AUTO FUNC					

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
<pre>seq_r(1,5) (.4875 .2376 .1158 .0565 .0275)</pre>					
<pre>seq_r(1,5) (-.2229 -.0497 -.0111 -.0025 -.00)</pre>					
<pre>seq_r(1,5) (-.4206 .1769 -.0744 .0313 -.013)</pre>					
<pre>seq_r(1,5) (.2447 .0599 .0146 .0036 .0009)</pre>					
seq_r(1,5)					
MAIN RAD AUTO FUNC 11/30					

Schülerauftrag (eventuell Gruppenarbeit):

Versuche eine Vorschrift zu finden, die zufällig eine Nullfolge mit einem rational gebrochenen folgenbildenden Term erzeugt.

Wir übertragen diese spezielle Folge in unsere Tabelle. Bei jeder Neuberechnung wird eine andere Zufallsfolge erzeugt. Zufällig habe ich gleich eine alternierende Folge erhalten.

Im ersten Fall erkennt man wieder den Wert von ca -1 , während im zweiten Fall für die Stelle $x_0 = 0$ schon die Betrachtung der einer Spalte mit den Änderungsraten ein verzweifelt Hin- und Herspringen zwischen $+2$ und -2 offenbart.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0	ax	x0+ax	f(x0+ax)		
	c1	c2	c3	c4		
1	2	.4343	2.4343	.6129		
2		-.1886	1.8114	1.1975		
3		.0819	2.0819	.9198		
4		-.0356	1.9644	1.0359		
5		.0154	2.0154	.9846		
6		-.0067	1.9933	1.0067		
7		.0029	2.0029	.9971		
r1 c1=2						
MAIN RAD AUTO FUNC						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	rs.af	rs.af/ax	ls.af	ls.af/ax		
	c7	c8	c9	c10		
1	-.3871	-.8914	.4814	-1.1086		
2	.1975	-1.0471	-.1797	-.9529		
3	-.0802	-.9795	.0836	-1.0205		
4	.0359	-1.0089	-.0352	-.9911		
5	-.0154	-.9961	.0155	-1.0039		
6	.0067	-1.0017	-.0067	-.9983		
7	-.0029	-.9993	.0029	-1.0007		
r7 c10= -1.0007279823101						
MAIN RAD AUTO FUNC						

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0	Δx	x0+Δx	f(x0+Δx)		
	c1	c2	c3	c4		
1	0	-.0939	-.0939	3.8143		
2		.0088	.0088	3.9824		
3		-.0008	-.0008	3.9983		
4		7.784E-5	7.784E-5	3.9998		
5		-7.31E-6	-7.31E-6	4.0000		
6		6.868E-7	6.868E-7	4.0000		
7		-6.45E-8	-6.45E-8	4.0000		

r7c1=0

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0-Δx	f(x0-Δx)	rs.Δf	rs.Δf/Δx		
	c5	c6	c7	c8		
1	.0939	3.8143	-.1857	1.9765		
2	-.0088	3.9824	-.0176	-1.9978		
3	.0008	3.9983	-.0017	1.9998		
4	-7.78E-5	3.9998	-.0002	-2.0000		
5	7.31E-6	4.0000	-1.46E-5	2.0000		
6	-6.87E-7	4.0000	-1.37E-6	-2.0000		
7	6.45E-8	4.0000	-1.29E-7	2.0000		

r7c8=2.0000013937097

Wir wenden uns wieder *DERIVE*-zu und zeigen ein Programm, das das selbe leistet wie die *TI*-Funktion inklusive der Ausgabe der Tabelle.

```
diff_rnd(f_, x0, sta, end, step, dx, k_, s_) :=
  Prog
  r_ := RANDOM(1)
  s_ := RANDOM(2)
  dx := VECTOR(s_*(1 - 2*r_)^k_, k_, sta, end, step)
  APPEND(["Δx"; "f(x0+Δx)-f(x0)"; "(f(x0+Δx)-f(x0))/Δx"], VECTOR([dx+k_

SUBST(f_, x, x0 + dx+k_) - SUBST(f_, x, x0), (SUBST(f_, x, x0 + dx+k_) - SUBST(f_

x, x0))/dx+k_], k_, sta, end, step))
```

(Ein Hinweis: während `rand(2)` am *TI* zufällig entweder 1 oder 2 erzeugt, generiert *DERIVE* mit `random(2)` eine Zufallszahl aus $\{0,1\}$)

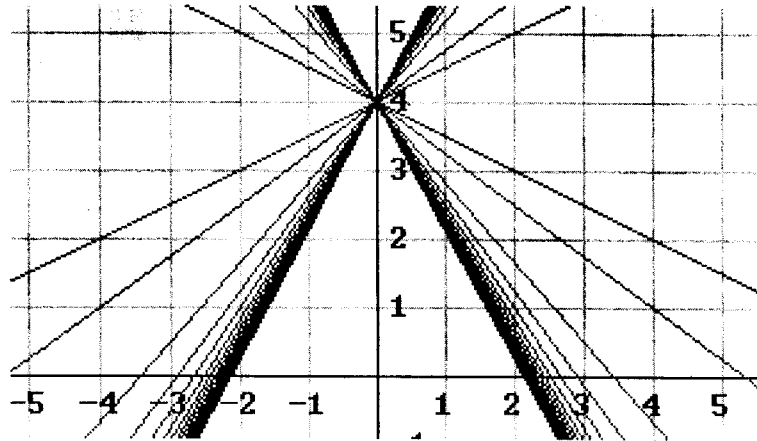
```
diff_rnd((( |x| / 2 - 2 )^2, 0, 1, 10, 1)
  Δx      f(x0+Δx)-f(x0)  (f(x0+Δx)-f(x0))/Δx
  -0.334542  -0.641105      1.91636
  0.111918   -0.220706      -1.97202
  -0.0374415 -0.0745326      1.99063
  0.0125258  -0.0250123     -1.99686
  -0.00419041 -0.00837643     1.99895
  0.00140187  -0.00280325    -1.99964
  -0.000468985 -0.000937916    1.99988
  0.000156895 -0.000313785    -1.99996
  - 5.24882 · 10-5 -0.000104975    1.99998
  1.75595 · 10-5 - 3.51190 · 10-5 -1.99999
```

Die Untersuchung des Verhaltens der Änderungsrate läßt sich mit *DERIVE* ähnlich durchführen. Man muss natürlich wieder für die Ausgabe in Tabellenform geeignete Funktionen definieren.

diff_sh() zeigt (shows) mit den gleichen Parametern wie appr_both() die Ergebnisse für die Änderungsraten. slopes() liefert nur die Anstiege aus der 2. und 3. Spalte, wobei die Funktion REST() die erste Zeile unberücksichtigt läßt. Damit können wir leicht die Sekantenscharen zeichnen lassen.

```
diff_sh( ( ( |x| / 2 - 2 ) ^ 2 , 0 , 0.5^n , 8 , 10 , 1 )
[
  Δx      (f(x0+Δx)-f(x0))/Δx  (f(x0)-f(x0-Δx))/Δx
  0.0039      -1.99              1.99
  0.00195     -1.99              1.99
  0.000976    -2                  2
]
```

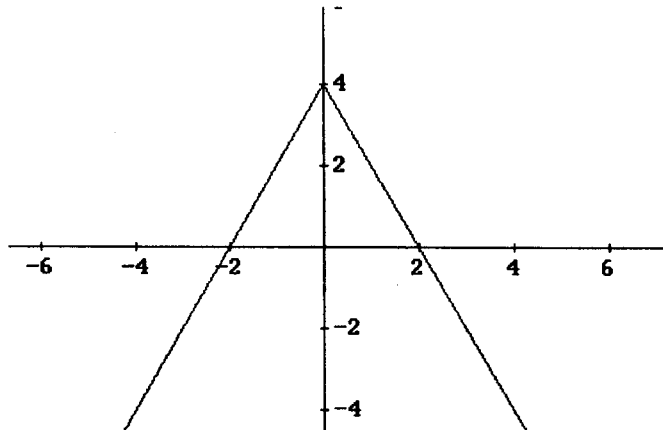
```
slopes := diff_sh( ( ( |x| / 2 - 2 ) ^ 2 , 0 , 10/n , 1 , 20 , 1 )
tangr := VECTOR(y = m_·x + 4, m_, REST(slopes COL 2))
tangl := VECTOR(y = m_·x + 4, m_, REST(slopes COL 3))
```



Schülerauftrag:

Erzeuge die vollständige „Tangente“ als abschnittsweise definierte Funktion und überlege, wie der Funktionsgraph aussehen könnte.

```
tangent := IF(x < 0, 4 + 2·x, IF(x > 0, 4 - 2·x, ?))
```



6 Eine entscheidende Verallgemeinerung

Die Änderungsrate wird auch *Differenzenquotient* genannt, und wenn es eine eindeutige momentane Änderungsrate gibt, dann bezeichnet man diese in der Mathematik auch als *Differentialquotient*. Dafür gibt es später noch eine exakte Erklärung.

Schülerauftrag (eventuell Gruppenarbeit):

Verwende zwei Polynomfunktionen (bis maximal 4. Grades, davon eine mit ganzen und eine mit nicht zu komplizierten, aber doch rationalen Koeffizienten) und suche die momentane Änderungsrate an zumindest 3 Stellen. Tritt dabei eine Stelle auf, von der du sagen kannst, dass es offensichtlich keinen eindeutigen Differentialquotienten zu geben scheint?

Um eine allgemeine Aussage über diesen „Differentialquotienten“ zu erhalten, ersetze bei beiden Funktionen die zu untersuchende Stelle durch eine Variable. (Um mit keinen der bisher verwendeten Variablen in Konflikt zu geraten, nimm für $x_0 = t$).

Wie lauten die Ergebnisse?

Sammelt Eure Resultate in einer Tabelle, in der ihr Funktion und Differentialquotienten gegenüberstellt.

Könnt ihr einen Zusammenhang zwischen der gegebenen Funktion und der „Formel“ für den Differentialquotienten entdecken?

Diese Untersuchung wird nun exemplarisch mit der Funktion $f(x) = -\frac{x^3}{8} + \frac{3x^2}{4}$.

Füge in einer weiteren Spalte das ausmultiplizierte Ergebnis aus c8 oder c10 an.

Kopiere den Inhalt von Zelle r10c11 über \blacklozenge C in die Zwischenablage und dann im Home Screen wieder mit \blacklozenge V in die Eingabezeile.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	rs.af/Δx	ls.af	ls.af/Δx	expandi...		
	c8	c9	c10	c11		
1	-.3750*	.0750*t...	-.3750*	-.3750*		
2	-.3750*	.0150*t...	-.3750*	-.3750*		
3	-.3750*	.0030*t...	-.3750*	-.3750*		
4	-.3750*	.0006*t...	-.3750*	-.3750*		
5	-.3750*	.0001*t...	-.3750*	-.3750*		
6	-.3750*	2.4000E...	-.3750*	-.3750*		
7	-.3750*	4.8000E...	-.3750*	-.3750*		

c11=expand(c10)
 MAIN RAD AUTO FUNC

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	rs.af/Δx	ls.af	ls.af/Δx	expandi...		
	c8	c9	c10	c11		
4	-.3750*	.0006*t...	-.3750*	-.3750*		
5	-.3750*	.0001*t...	-.3750*	-.3750*		
6	-.3750*	2.4000E...	-.3750*	-.3750*		
7	-.3750*	4.8000E...	-.3750*	-.3750*		
8	-.3750*	9.6000E...	-.3750*	-.3750*		
9	-.3750*	1.9200E...	-.3750*	-.3750*		
10	-.3750*	3.8400E...	-.3750*	-.3750*		

r10c11=-.375*t^2+1.5000000038...
 MAIN RAD AUTO FUNC

$-.375 \cdot t^2 + 1.5000000000375 \cdot t - 7.500000$
 $-.375 \cdot t^2 + 1.500 \cdot t - 7.500E-11$
 $...000375*t-7.5000000001249E-11$
 MAIN RAD APPROX FUNC 5/30

Auf älteren TI-Modellen läßt sich der Zelleninhalt nicht mit Copy & Paste übertragen. In diesem Fall wechsele in den Home Screen und hole dir mit `analysis[11][10]` das 10. Element der 11. Spalte her.

Beschreibe auch die „letzten“ Elemente in den Spalten c4 und c6 – wiederhole dabei die Stetigkeitsuntersuchung. Wechsle auch immer wieder die Nullfolgen in Spalte c2.

Der letzte Teil der Formel für den Differenzenquotienten ($-7.5 \cdot 10^{-11}$) ist so klein, dass man ihn vernachlässigen darf. Wie heißt dann das Ergebnis?

Und wie sieht das in *DERIVE* aus? Natürlich genauso!

$$f(x) := -\frac{x^3}{8} + \frac{3 \cdot x^2}{4}$$

EXPAND(diff_sh(f(x), x, 0.1ⁿ, 19, 20, 1))

$$\left[\begin{array}{ccc} \Delta x & (f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x & (f(x_0)-f(x_0-\Delta x))/\Delta x \\ -19 & -0.375 \cdot x^2 + 1.49 \cdot x + 7.49 \cdot 10^{-20} & -0.375 \cdot x^2 + 1.5 \cdot x - 7.5 \cdot 10^{-20} \\ 10 & -0.375 \cdot x^2 + 1.49 \cdot x + 7.49 \cdot 10^{-21} & -0.375 \cdot x^2 + 1.5 \cdot x - 7.5 \cdot 10^{-21} \end{array} \right]$$

Schülerauftrag (eventuell Gruppenarbeit):

Suche für die dir bekannten Funktionstypen allfällige Formeln für den Differentialquotienten!

Winkelfunktionen, Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, einfache zusammengesetzte Funktionen, Wurzelfunktion, gebrochen rationale Funktionen,

Einige Beispiele: Wir suchen näherungsweise den Differentialquotienten für $f(x) = \sin x$

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0-Δx	f(x0-Δx)	rs.Δf	rs.Δf/Δx		
	c5	c6	c7	c8		
1	t-.0039...	sin(t-...	sin(t+...	256.000...		
2	t-.0019...	sin(t-...	sin(t+...	512.000...		
3	t-.0009...	sin(t-...	sin(t+...	1024.000...		
4						
5						
6						
7						

r3c8=1024.*(sin(t+9.765625E-4) - sin(t))

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
1024.*(sin(t+9.765625E-4) - sin(t)) 1024.000000*(sin(t+.000977) - sin(t)) tExpand(1024.*(sin(t+9.765625E-4) - sin(t)) 1.000000*cos(t) - .000488*sin(t))					
tExpand(Ans(1))					

Wie lautet das Ergebnis?

Mit DERIVE gibt's anfänglich Schwierigkeiten, da die Genauigkeit erhöht werden muss:

#58: diff_sh(SIN(x), x, 0.1ⁿ, 8, 10, 1)

$$\left[\begin{array}{ccc} \Delta x & (f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x & (f(x_0)-f(x_0-\Delta x))/\Delta x \\ -8 & & \\ 10 & 0 & 0 \\ -9 & & \\ 10 & 0 & 0 \\ -10 & & \\ 10 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

#60: PrecisionDigits := 40

#61: NotationDigits := 6

$$\left[\begin{array}{ccc} \Delta x & (f(x_0+\Delta x)-f(x_0))/\Delta x & (f(x_0)-f(x_0-\Delta x))/\Delta x \\ -8 & & \\ 10 & 0.999999 \cdot \text{SIN}(x + 1.57079) & -0.999999 \cdot \text{SIN}(x - 1.57079) \\ -9 & & \\ 10 & 0.999999 \cdot \text{SIN}(x + 1.57079) & -0.999999 \cdot \text{SIN}(x - 1.57079) \\ -10 & & \\ 10 & 0.999999 \cdot \text{SIN}(x + 1.57079) & -0.999999 \cdot \text{SIN}(x - 1.57079) \end{array} \right]$$

Wer kennt 1,57079?? Wozu ist $\sin(x + \pi/2)$ äquivalent?

Jetzt kommt das Ergebnis noch deutlicher heraus!

#63: Trigonometry := Expand

$$\begin{array}{l} \Delta x \quad (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) / \Delta x \\ \left. \begin{array}{l} 10^{-8} \quad 0.999999 \cdot \cos(x) - 4.99999 \cdot 10^{-9} \cdot \sin(x) \\ \#64: \quad 10^{-9} \quad 0.999999 \cdot \cos(x) - 4.99999 \cdot 10^{-10} \cdot \sin(x) \\ \quad \quad 10^{-10} \quad 0.999999 \cdot \cos(x) - 4.99999 \cdot 10^{-11} \cdot \sin(x) \end{array} \right\} \\ \cdot \\ (f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)) / \Delta x \\ \left. \begin{array}{l} 0.999999 \cdot \cos(x) + 4.99999 \cdot 10^{-9} \cdot \sin(x) \\ 0.999999 \cdot \cos(x) + 4.99999 \cdot 10^{-10} \cdot \sin(x) \\ 0.999999 \cdot \cos(x) + 4.99999 \cdot 10^{-11} \cdot \sin(x) \end{array} \right\} \end{array}$$

Man verwendet hier sehr sinnvoll ein Grundprinzip der numerischen und angewandten Mathematik, nämlich zu kleine „Anhängsel“ ganz einfach wegzulassen, um zu einem brauchbaren Ergebnis zu gelangen.

Hier werden doch einige mathematische Kenntnisse verlangt, die über das Manipulieren mit Doppelbrüchen und Additionstheorem hinausgehen. Außerdem macht es Sinn, zu erkennen, dass nicht für alle Funktionstypen so einfach der Differentialquotient „bestimmt“ werden kann.

Ein letztes kleines Beispiel zur Vorbereitung auf die Kettenregel mit $f(x) = e^{3x}$.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0-ax	f(x0-ax)	rs.af	rs.af/ax			
	c5	c6	c7	c8			
1	t-.0039...	.988350...	.011788...	3.01764...			
2	t-.0019...	.994158...	.005877...	3.00880...			
3	t-.0009...	.997075...	.002934...	3.00439...			
4							
5							
6							
7							
r3c8=3.0043988258816*e^(3*t)							
MAIN RAD AUTO FUNC							

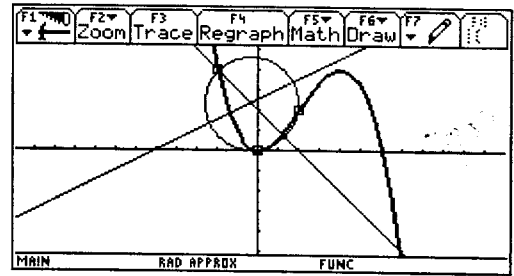
Es soll nochmals klar ausgesprochen werden, dass mit dieser Vorgangsweise keineswegs die strengen mathematischen Herleitungen umgangen werden sollen. Aber Untersuchungen wie diese helfen doch weitgehend, dann die abstrakten Überlegungen durch sehr konkrete Erfahrungen verständlicher zu machen.

Dabei kann die Reihenfolge des Vorgehens durchaus unterschiedlich sein. Ich habe gute Erfahrungen in beiden Richtungen: numerisch-graphisch beginnen und dann analytisch exaktifizieren, aber es läßt sich auch gut analytisch beginnen und numerisch-graphisch begleitet, analytisch fortsetzen. Man kann auch zuerst analytisch durcharbeiten und dann auf der anderen Ebene die Inhalte verdeutlichen und vertiefen. Wie fast überall in der Schulmathematik liegt auch hier der Erfolg im geschickten Wechsel der Darstellungsformen, der der jeweiligen unterrichtlichen Situation angepasst werden muss.

Wenn wir nun den symbolischen Taschenrechner, *DERIVE* oder irgend ein anderes CAS einsetzen können, dann läßt sich ohne allzuviel Aufwand ein weiteres Ziel anstreben, das man ohne diese Hilfsmittel wohl nur schwer in der Sekundarstufe II erreichen kann. (Natürlich, Rezepte lassen sich immer angeben, aber ob das wohl das Richtige ist?)

7 Die Krümmung in der Datentabelle

Es ist sicher eine Herausforderung, noch einen Schritt weiter zu gehen, und auch das Krümmungsverhalten eines Graphen auf diese Art und Weise zu untersuchen. Man beginnt mit einer Variante des klassischen Zugangs, der ja zwei benachbarte Kurvennormale zusammenrücken läßt, und dabei beobachtet, ob es eine Grenzlage des Schnittpunkts dieser beiden Geraden gibt. Da uns aber die Differentialrechnung noch immer nicht zur Verfügung steht, können wir auch keine sichere Aussage über die Kurvennormale machen.



Wir wollen die Δx - Annäherung und das bereits aufgebaute Datenblatt weiterverwenden. Unsere Aufgabe soll also darin bestehen, den Krümmungskreis an den Stellen $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, und später vielleicht wieder ganz allgemein für $x_0 = t$ finden.

Dazu Zweck fixieren wir drei Punkte am Graphen $(x_0 - \Delta x, f(x_0 - \Delta x))$, $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ und suchen den Umkreis des entstehenden Dreiecks. In der obigen Abbildung ist $x_0 = 0$. Wenn nun Δx gegen 0 geht, dann hat der Kreis immer noch drei Punkte mit der Kurve gemeinsam. Der „letzte“ dieser Kreise ist dann der gesuchte „Krümmungskreis“.

Wir stellen die Fragen: Wo liegt der Mittelpunkt dieses Kreises? Wie groß ist sein Radius?

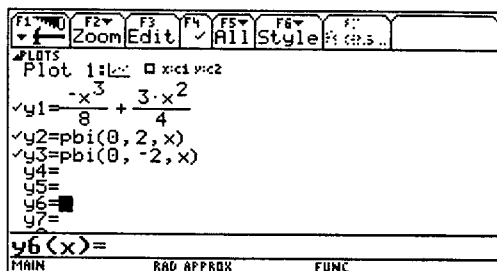
Der Mittelpunkt ist als Umkreismittelpunkt die Grenzlage des Schnittpunktes von zwei Streckensymmetralen. Damit erweitern wir wieder unser Datenblatt. Nun nützen wir aber die „power“ eines Computer Algebra Systems und definieren zuerst eine Funktion $\text{pbi}(x_0, h, x)$ für die Streckensymmetrale (= *perpendicular bisector*) zwischen den beiden Punkten $[(x_0, f(x_0)), (x_0 + h, f(x_0 + h))]$ und wir suchen die x -Koordinate des Schnittpunkts von $\text{pbi}(x_0, h, x)$ mit $\text{pbi}(x_0, -h, x)$. Das Resultat speichern wir als $\text{xco}(x_0, h)$. Die Abbildung zeigt die beiden Streckensymmetralen (h ist äquivalent zu Δx).

Schülerauftrag:

Wie lautet die Gleichung für die Streckensymmetrale zwischen zwei Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) ?

Forme die Gleichung so um, dass die allgemeinen Ausdrücke von oben verwendet werden und überprüfe die Formel mit zumindest zwei Punktepaaren.

Berechne den Schnittpunkt der Streckensymmetralen für $x_0 = 0$ und $h = 1$, bzw. $h = -1$ und dann noch für $x_0 = 5$ und $h = 0,5$, bzw. $h = -0,5$.



$$-h / ((f(x_0+h) - f(x_0)) * (x - (2*x_0+h)/2) + (f(x_0) + f(x_0+h)) / 2) \rightarrow \text{pbi}(x_0, h, x)$$

$$\text{zeros}(\text{pbi}(x_0, h, x) - \text{pbi}(x_0, -h, x), x)[1]$$

$$\text{ans}(1) \rightarrow \text{xco}(x_0, h)$$

$$-x^3/8 + 3*x^2/4 \rightarrow f(x)$$

Diese drei Funktionen führen zur graphischen Darstellung am Beginn des Abschnitts.

Dann wechseln wir wieder in den Data/Matrix Editor und fügen zwei weitere Spalten c12 und c13 an, in denen wir hoffentlich die Koordinaten der Mittelpunkte unserer Kreisfolge verfolgen können.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	ls.af...	expan...	xCO	yCO	radius	
	c10	c11	c12	c13	c14	
1	-.406	-.406	.018	.761	.761	
2	-.195	-.195	.005	.690	.690	
3	-.096	-.096	.001	.673	.673	
4	-.047	-.047	3.2E-4	.668	.668	
5	-.024	-.024	8.1E-5	.667	.667	
6	-.012	-.012	2.0E-5	.667	.667	
7	-.006	-.006	5.1E-6	.667	.667	
Er7c14=.66668955490846						
MAIN	RAD	APPROX	FUNC			

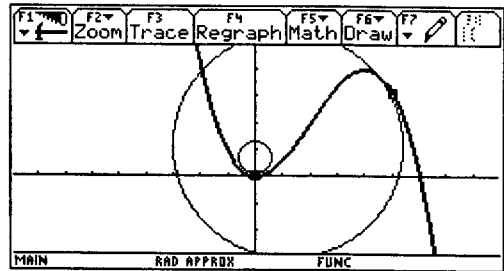
Tabelle für $x_0 = 0$ ($c1[1] = 0$)

Im Header von Spalte c12 steht nun $c12 = xco(c1[1], c2)$ und daneben ist $c13 = pbi(c1[1], c2, c12)$.

In c14 werden die Radien der entstehenden Kreise ausgegeben. Das sind jeweils die Abstände vom Mittelpunkt zu einem der Kurvenpunkte. Alle Werte in den Spalten c12, c13 und c14 scheinen sich bei $(0, 2/3, 2/3)$ „zu treffen“!

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	ls.af...	expan...	xCO	yCO	radius	
	c10	c11	c12	c13	c14	
5	-1.840	-1.840	1.2374	1.1173	4.2648	
6	-1.857	-1.857	1.2371	1.1179	4.2648	
7	-1.866	-1.866	1.2370	1.1180	4.2648	
8	-1.871	-1.871	1.2370	1.1180	4.2648	
9	-1.873	-1.873	1.2370	1.1181	4.2648	
10	-1.874	-1.874	1.2370	1.1180	4.2648	
11						
Er11c14=						
MAIN	RAD	APPROX	FUNC			

Tabelle für $x_0 = 5$ (mit $c1[1] = 5$) und der zugehörige Graph mit den approximierenden Kreisen.



Schülerauftrag:

Wo dürfte der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel einer quadratischen Parabel liegen?

Bestimme die Krümmungskreise in den Scheiteln einer Ellipse. Suche die entsprechenden Formeln in geeigneten Unterlagen und vergleiche die Ergebnisse. Wie kann man die Krümmungsmittelpunkte in den Scheiteln einer Ellipse konstruieren?

Beantworte die obigen Fragen auch für die reellen Scheitel einer Hyperbel.

8 Noch eine Verallgemeinerung

Für die Verallgemeinerung ist es ratsam, die Tabelle auf dem TI auf das Notwendigste zu reduzieren, da sonst Speicherprobleme auftreten können. D.h., man wird ein neues Datenblatt eröffnen, in dem nur 4 Spalten vorzukommen brauchen. Die Rechnung wird beschleunigt, indem man die „Folge“ so konzipiert, dass nur ihre letzten Elemente oder überhaupt nur das letzte Element angezeigt wird.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	x0	Δx	xCO	yCO		
	c1	c2	c3	c4		
1	t	1/100	-(27000...	-207997...		
2						
3						
4						
5						
6						
7						
c2=seq(1/n^2,n,10,10)						
MAIN	RAD	EXACT	FUNC			

oder setze $c2[1] = 1/10000$

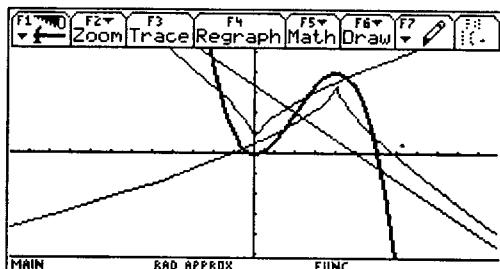
F1	F2	F3	F4	F5	F6
Algebra	Calc	Other	PrgmIO	Clean Up	
$\frac{6.4999}{t-2.0000} - .0703 \cdot t^5 + .7031 \cdot t^4 - 1.968t$					
$\text{expand}\left(\frac{-20799760001}{4800000000} \cdot (t-2) - \frac{2000000 \cdot t^3}{4800000000}\right)$					
$\frac{-4.3333}{t-2.0000} - .3125 \cdot t^3 + 1.8750 \cdot t^2 - .7500$					
$\text{DrawParm } xt, yt, -10, 10, .1$					
$\text{drawparm } xt, yt, -10, 10, .1$					
MAIN	RAD	EXACT	FUNC		7/30

(Ein Tipp: Bei mehrmaligem Wechsel zwischen Data / Matrix Editor und Home Screen sollte man besser über \square [F] Auto Calculation Off schalten, da sonst immer wieder zeitaufwendig neu gerechnet wird).

Was haben wir nun erreicht? In den letzten Zellen der Spalten für xCO und yCO ergeben sich allgemeine Ausdrücke, in denen die Koordinaten der Kreismittelpunkte in Abhängigkeit von der gewählten Stelle t beschrieben werden. Das ist der klassische Fall für die **Parameterdarstellung** einer Kurve.

Die Zellinhalte werden in den Home Screen kopiert und unter Variablenamen, zB. x_t und y_t gespeichert. Mit der DrawParm – Anweisung und geeigneten Argumenten erreicht man sofort die graphische Darstellung dieser Kurve.

Damit haben wir die Ortslinie der Krümmungskreismittelpunkte zumindest näherungsweise gefunden. Diese Kurve nennt man „**Evolute**“.



Schülerauftrag:

Untersuche das Verhalten dieser Kurve an der Stelle $t = 2$. Warum gibt's hier Schwierigkeiten?

Es sollte eine Herausforderung für die Schüler sein, die Polstelle dieser Kurve zu untersuchen und dann die offensichtlich bestehende schiefe Asymptote zu finden. Auch ohne schon vorher einen „Wendepunkt“ erwähnt zu haben kann man ihnen die Chance geben, einen Kurvenpunkt ohne Krümmung eigenständig zu erkennen – und damit die Tatsache, dass die gesuchte Asymptote die Normale auf die Tangente in diesem Punkt sein muss.

DATA	pbi	c7
	c6	
5	3.333-.667*x	
6	3.333-.667*x	
7	3.333-.667*x	
8	3.333-.667*x	
9	3.333-.667*x	
10	3.333-.667*x	
11	3.333-.667*x	

c6=phi(c1[1],c2,x)

MAIN RAD AUTO FUNC

Und hier endet auch der erste Teil unserer Reise. Wir haben mit der Untersuchung von Unstetigkeitsstellen begonnen. unter ihnen eine „Polstelle“ entdeckt und wir schließen hier mit der Entdeckung einer anderen Polstelle. Ich glaube, dass wir eine interessante Reise in das Reich der Analysis unternommen haben.

Unser letztes Ziel haben wir allerdings noch nicht erreicht. Jetzt könnte man ansetzen, um mit Grenzwertüberlegungen alle unsere numerischen und graphischen Erkenntnisse zu exaktifizieren und damit erst richtig zu begünden und zu bestätigen.

Schüleraufgaben:

Bestimme die Evoluten von bekannten Kurven wie Parabel, Ellipse, Winkelfunktionen, Exponentialfunktion,....?

Ein größeres Projekt ist:

Nimm an, dass die gegebene Funktion in Parameterdarstellung vorliegt. $p(t) = [x(t), y(t)]$. Bestimme nun die Evolute dieser Kurve. Starte mit $p(t) = [t, -t^3/8 + 3t^2/4]$ um die Vorgangsweise zu bestätigen.

Suche berühmte Kurven der Mathematik und suche deren Evoluten (Zykloide, Cissoide,)

Beginne mit einer Parabel und bestimme deren Evolute der Evolute.

Arbeite wieder mit verschiedenen Folgen, auch mit der Zufallsfolge.

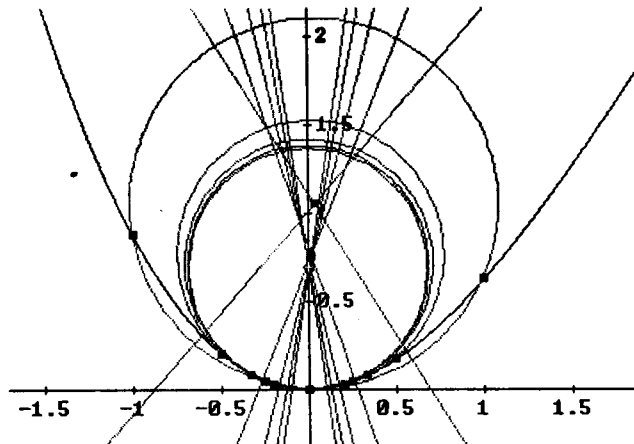
Dieser Teil wurde nun durchgängig mit dem TI bearbeitet. Im folgenden sollen einige Bildschirmausschnitte zeigen, wie einfach es ist, seine Ideen von einer Plattform auf die andere zu übertragen. Natürlich bietet der Schirm eines PC zusammen mit einer farbigen Darstellung noch eindrucksvollere Ergebnisse.

And subsequently a sequence of circles passing the point triples.

#95: $VECTOR((x-x_n)^2 + (y-y_n)^2 = |[x_n, y_n]|^2, n, 1, 5)$

TABLE([x_n, y_n], n, 5, 25, 5)

5	0.00325	0.681
10	0.000828	0.67
15	0.000369	0.668
20	0.000208	0.667
25	0.000133	0.667



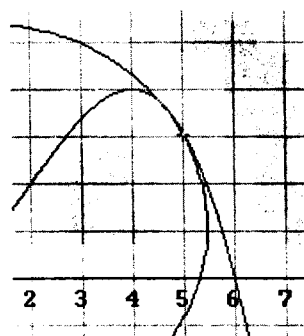
Zuerst zeigen wir eine Folge von Kreisen, die sich für die Stelle x_0 in eine Grenzlage zusammenschieben. Die Tabelle kommt sicherlich bekannt vor. Unten wird die Stelle $x_0 = 5$ angesprochen.

Which is the circle of curvature for $x_0 = 5$.

#106: $VECTOR([x_{0n}(5, 0.5^n), y_{0n}(5, 0.5^n), r_{0n}(5, 0.5^n)], n, 8, 10)$

#107:
$$\begin{bmatrix} 1.23 & 1.11 & 4.26 \\ 1.23 & 1.11 & 4.26 \\ 1.23 & 1.11 & 4.26 \end{bmatrix}$$

#108: $(x-1.23)^2 + (y-1.11)^2 = 4.26^2$

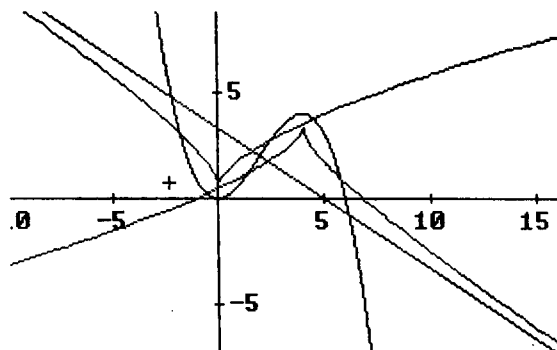
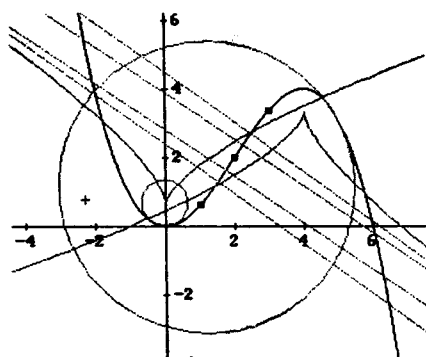


Und dann noch die ominöse Stelle $x_0 = 2$, an der die schon betrachteten Probleme auftreten.

Now for $x_0 = 2$:

#109: $VECTOR([x_{0n}(2, 0.5^n), y_{0n}(2, 0.5^n), r_{0n}(2, 0.5^n)], n, 8, 10)$

Surprisingly problems are occurring ??? We leave this question open for the moment and proceed to a general place t:



Man erkennt, dass benachbarte pbi s fast parallel sind. Die „allerletzte“ Streckensymmetrale wird die Richtung zum unendlich fernen Punkt zeigen.

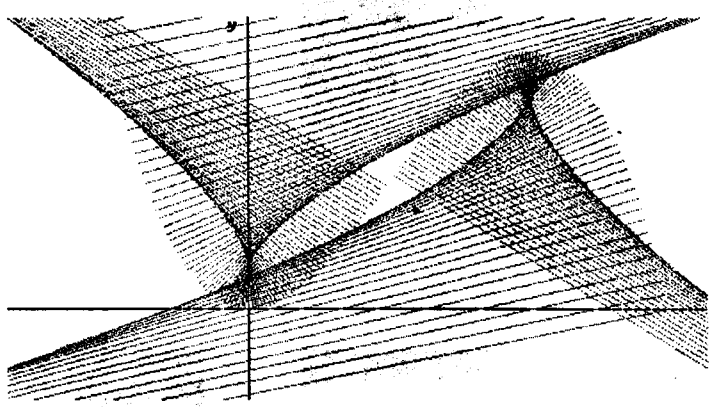
One can recognize that neighbouring pbi s are parallel. The "very last" pbi will have the direction to a point in infinity:

#125:
$$\text{EXPAND} \left(\text{VECTOR} \left(\left[\left[pbi \left(2, \frac{1}{2} \right) \right], n, 10, 50, 10 \right] \right) \right)$$

#126:
$$\begin{bmatrix} 3.34 - 0.666 \cdot x \\ 3.33 - 0.666 \cdot x \\ 3.33 - 0.666 \cdot x \\ 3.33 - 0.666 \cdot x \\ 3.33 - 0.666 \cdot x \end{bmatrix}$$

The result is very clear: $y = (10 - 2x)/3$

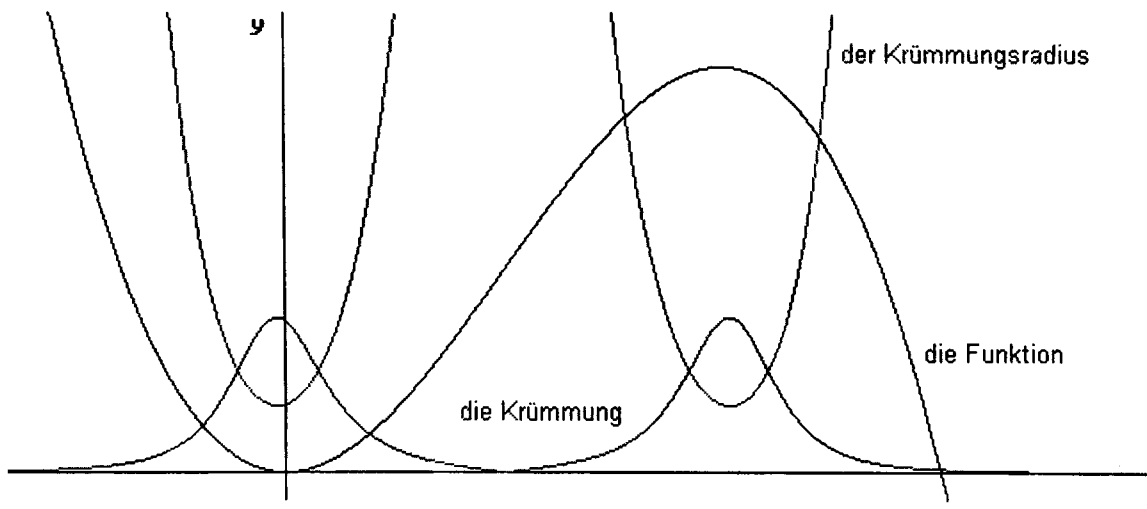
#127:
$$\frac{10 - 2 \cdot x}{3}$$



Die Schar der gezeichneten Kreisradien ergibt ein hübsches Muster und läßt deutlich erkennen, dass die Evolute die Einhüllende der Kurvennormalen darstellt.

Schüleraufgaben:
 Erzeuge solche Fadengrafiken nach eigenen Vorstellungen, indem Du passende Grundfunktionen suchst. Auch stückweise definierte Funktionen eignen sich gut dazu.

Zum Abschluss stellen wir in einer Grafik den Graphen der Funktion, des Krümmungsradius und dessen Kehrwert, der Krümmung, in Abhängigkeit von der Stelle x dar. Die gegenseitigen Abhängigkeiten können hier sehr deutlich erkannt werden.



9 Abschließende Bemerkungen

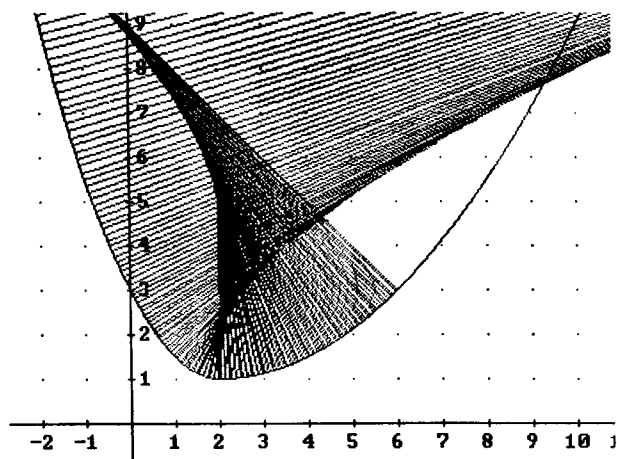
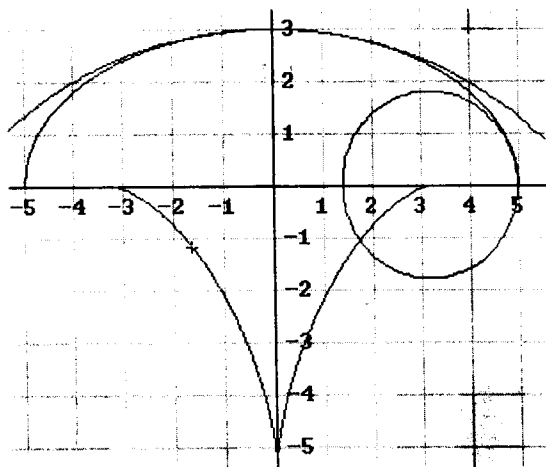
Ich habe die – für mich überraschende - Erfahrung gemacht, dass die Schülerinnen und Schüler gerne diesen sehr innermathematischen Gedanken und Überlegungen folgen. Irgendwie fühlen sie die Abenteuer in ihren Köpfen und werden ein wenig vom Geist der Mathematik inspiriert.

Ich möchte mich besonders bei David Bowers bedanken, der in seinem fabelhaften Workshop in San Francisco auf die vielen pädagogischen und diaktischen Möglichkeiten des Data/Matrix Editors hingewiesen hat.

Außerdem bin ich einigen Teilnehmern an der 1. T³ – Winterakademie (1.-6. Jänner 2001, Spital/Pyhrn, Österreich) zu großem Dank verpflichtet. Sie zeigten die Idee der „absoluten Adressierung“ einer Zelle im Data/Matrix Editor (K.-H. Keunecke, Detlev Kirmse and Manfred Grote). Darüber hinaus extra noch meinem Freund K.-H. Keunecke, da mich gerade sein für die ICTMT Klagenfurt bestimmter Vortrag inspiriert hat, meine ursprünglichen Untersuchungen auf die Krümmung auszuweiten.

Ich widme dieses Papier unserem Detlev Kirmse und seiner Familie. Detlev hat unmittelbar nach Heimkunft von der Winterakademie einen Schlaganfall erlitten. Alle Freunde und Kollegen wünschen ihm eine baldige völlige Genesung und wir freuen uns auf viele weitere gemeinsame Stunden.

Mit diesem mathematischen Inhalt verbinde ich außerdem schöne Erinnerungen an Jim Schultz (University of Ohio). Während seines Besuches in St. Pölten war er Zeuge meines ersten Versuches, dieses mathematische Stoffgebiet so an die Schüler heranzutragen. Am darauffolgenden Abend hatten wir ein langes Gespräch – bei einem Wiener Heurigen, versteht sich – über die Schülerreaktionen und die Vorzüge einer graphisch-numerischen Vorbereitung der Grundlagen, auf denen später strenge Analytik und Exaktifizierung aufbauen können und sollen. Und schließlich muss ich mich auch bei den Schülern der 4. Jahrgänge der BHAK St.Pölten im Schuljahr 2000/2001 dafür bedanken, dass sie so willig den Spuren ihres neugierigen Lehrers gefolgt sind.



Die diesbezügliche DERIVE 5 Datei kann beim Autor auf Anfrage erhalten werden. Auch sonstige Anfragen, Anregungen und Kritik werden gerne entgegengenommen.

- [1] K.-H. Keunecke, Curvature as a Limit, DERIVE Newsletter #41, 2001
- [2] Josef Böhm, From Pole to Pole on the Data-Editor, DERIVE Newsletter #41, 2001
- [3] David Bowers, The Best of Two Worlds, Lecture on the ICTCM12, San Francisco